

ОПЕРАТОР ШРЕДИНГЕРА С δ -ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

А. С. КОСТЕНКО, М. М. МАЛАМУД, AND Д. Д. НАТЯГАЙЛО

Аннотация. Изучается матричный оператор Шредингера с точечными взаимодействиями на полуоси. Используя теорию граничных троек и соответствующих им функций Вейля, мы устанавливаем связь между спектральными свойствами (индексы дефекта, самосопряженность, полуограниченность, дискретность спектра и т.д.) исследуемых операторов и некоторого класса блочных якобиевых матриц.

1. Введение. В настоящей статье мы рассматриваем матричный оператор Шредингера с точечными взаимодействиями. Именно, изучается оператор $H_{X,\Lambda}$, ассоциированный в пространстве вектор-функций $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^p)$ с формальным дифференциальным выражением

$$(1.1) \quad l_{X,\Lambda} := -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_p + \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \delta(x - x_n), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Здесь $\Lambda_k = \Lambda_k^* \in \mathbb{C}^{p \times p}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $X := \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \infty$, а δ — функция Дирака. Наша основная цель — исследование связи между спектральными свойствами операторов $H_{X,\Lambda}$ и блочных якобиевых матриц вида (4.7) и (4.18).

Литература об операторах Шредингера с матрично-значными потенциалами обширна, и в качестве основного источника информации и дальнейших ссылок мы лишь укажем [1, 2, 3] (в частности, в этих монографиях изучается случай операторно-значных потенциалов). В последнее время возрос интерес к операторам Шредингера, или более общо к операторам Штурма–Лиувилля с коэффициентами-распределениями, что, в свою очередь, продиктовано различными вопросами математической физики. Отметим лишь недавние работы [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10], содержащие, в частности, достаточно подробную библиографию. Скалярные операторы, задаваемые выражениями (1.1), впервые возникли в квантовой механике как точно решаемые модели (см. [11]), и их спектральные свойства достаточно хорошо изучены (см., например, [11, 12, 13, 14, 15]). Одна из основных целей данной работы — обобщить результаты из [12, 13] на случай $p > 1$. А именно, мы показываем, что в случае

$$(1.2) \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} d_k < \infty, \quad d_k := x_k - x_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

спектральные свойства минимального оператора $H_{X,\Lambda}$, порождаемого выражением (1.1) в $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^p)$ (см. точное определение в разделе 3), тесно связаны со

Работа Костенко А. С. выполнена при финансовой поддержке Австрийского научного фонда (FWF), по. Р 26060.

Матем. Заметки (в печати).

спектральными свойствами минимального оператора, задаваемого в $\ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p)$ блочной матрицей Якоби

$$(1.3) \quad B_{X,\Lambda} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1 d_2} I_p + \frac{1}{d_1 + d_2} \Lambda_1 & \frac{-1}{r_1 r_2 d_2} I_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \frac{-1}{r_1 r_2 d_2} I_p & \frac{1}{d_2 d_3} I_p + \frac{1}{d_2 + d_3} \Lambda_2 & \frac{-1}{r_2 r_3 d_3} I_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \frac{-1}{r_2 r_3 d_3} I_p & \frac{1}{d_3 d_4} I_p + \frac{1}{d_3 + d_4} \Lambda_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

В частности, мы усиливаем некоторые результаты из [5, 6] об индексах дефекта операторов (1.1).

В заключение кратко опишем содержание работы. Мы изучаем оператор $H_{X,\Lambda}$ в рамках теории расширений симметрических операторов. А именно, мы рассматриваем $H_{X,\Lambda}$ как расширение некоторого симметрического оператора с бесконечными индексами дефекта (см. (3.5)) и затем применяем теорию граничных троек и соответствующих им функций Вейля (см., например, [16, 17]). Поэтому в разделе 2 мы приводим основные определения и факты, необходимые нам в дальнейшем. Строгое определение оператора $H_{X,\Lambda}$ содержится в разделе 3. Затем в разделе 4 мы строим граничные тройки для минимального оператора (3.5), а также указываем граничные операторы, параметризующие (1.1) в этих граничных тройках. Данные результаты являются ключевыми при установлении связи между спектральными свойствами операторов (1.1) и (1.3). Так, в разделе 5 (см. Теорему 1) мы доказываем, что их индексы дефекта совпадают, $n_{\pm}(H_{X,\Lambda}) = n_{\pm}(B_{X,\Lambda})$. Применяя результаты из теории блочных матриц Якоби (см., например, [18, 19, 20, 21, 22]), мы указываем различные достаточные условия для справедливости равенств $n_{\pm}(H_{X,\Lambda}) = p_1$ с произвольным $p_1 \in \{0, \dots, p\}$. В заключительном разделе 6 доказывается Теорема 2, устанавливающая тесную связь между спектральными свойствами операторов $H_{X,\Lambda}$ и якобиевых матриц $B_{X,\Lambda}$. Так, они одновременно полуограничены, неотрицательны, имеют дискретный (или отрицательный дискретный) спектр.

Обозначения. \mathbb{N} , \mathbb{R} и \mathbb{C} имеют стандартное значение; $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$, и $\mathbb{C}_{\pm} = \{z \in \mathbb{C} : \pm \operatorname{Im} z > 0\}$.

\mathfrak{H} и \mathcal{H} – сепарабельные гильбертовы пространства. $I_{\mathfrak{H}}$ и $\mathbb{O}_{\mathfrak{H}}$ – единичный и нулевой операторы в \mathfrak{H} , соответственно; $I_p = I_{\mathbb{C}^p}$ и $\mathbb{O}_p = \mathbb{O}_{\mathbb{C}^p}$. $[\mathfrak{H}, \mathcal{H}]$ – множество ограниченных операторов из \mathfrak{H} в \mathcal{H} ; $[\mathfrak{H}] = [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$; $\mathfrak{S}_p(\mathfrak{H})$ – двусторонние идеалы Неймана–Шаттена в $[\mathfrak{H}]$, $p \in (0, \infty]$. Далее, $\ell^2(\mathbb{N}; \mathcal{H}) = \ell^2(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{H}$ – гильбертово пространство \mathcal{H} -значных последовательностей $f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, таких что $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{\mathcal{H}}^2$; $\ell_0^2(\mathbb{N}; \mathcal{H}) = \ell_0^2(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{H}$ – подмножество финитных последовательностей из $\ell^2(\mathbb{N}; \mathcal{H})$. Также нам понадобятся следующие соболевские пространства:

$$W^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^p) := \bigoplus_{k=1}^{\infty} W^{2,2}([x_{k-1}, x_k]; \mathbb{C}^p),$$

$$W_{\text{comp}}^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^p) := \{f \in W^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^p) : \operatorname{supp}(f) \text{ компактен в } [0, \infty)\}.$$

2. Предварительные сведения.

2.1. Линейные отношения. Пусть \mathfrak{H} – гильбертово пространство. *Линейным отношением* в \mathfrak{H} называется линейное подпространство в $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. Множество замкнутых линейных отношений в \mathfrak{H} обозначим $\tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$. Линейный оператор T

в \mathfrak{H} отождествляют с его графиком $\text{gr } T$, поэтому множество $\mathcal{C}(\mathfrak{H})$ замкнутых линейных операторов в \mathfrak{H} отождествляется с подмножеством $\tilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$.

Напомним, что $\text{dom}(\Theta) = \{f : \{f, f'\} \in \Theta\}$, $\text{ran}(\Theta) = \{f' : \{f, f'\} \in \Theta\}$, $\text{ker}(\Theta) = \{f : \{f, 0\} \in \Theta\}$ и $\text{mul}(\Theta) = \{f' : \{0, f'\} \in \Theta\}$ называют *областью определения*, *множеством значений*, *ядром* и *многозначной частью* линейного отношения Θ , соответственно. Сопряженное линейное отношение определяется как

$$\Theta^* := \{\{g, g'\} : (f', g) = (f, g') \ \forall \{f, f'\} \in \Theta\}.$$

Линейное отношение Θ называется *симметрическим* (самосопряженным), если $\Theta \subseteq \Theta^*$ ($\Theta = \Theta^*$). Отметим, что многозначная часть $\text{mul}(\Theta)$ симметрического линейного отношения Θ ортогональна его области определения $\text{dom}(\Theta)$. Полагая $\mathfrak{H}_{\text{ор}} := \overline{\text{dom}(\Theta)}$, получаем ортогональное разложение $\Theta = \Theta_{\text{ор}} \oplus \Theta_{\infty}$, где $\Theta_{\text{ор}}$ – симметрический оператор в $\mathfrak{H}_{\text{ор}}$, который называется *операторной частью* линейного отношения Θ , а $\Theta_{\infty} := \{0\} \times \text{mul}(\Theta)$.

2.2. Граничные тройки и функция Вейля. Всюду в дальнейшем будем считать, что A – плотно заданный замкнутый симметрический оператор в \mathfrak{H} , $\mathfrak{N}_z(A) := \mathfrak{H} \ominus \text{ran}(A - \bar{z}) = \text{ker}(A^* - z)$, $z \in \mathbb{C}$ – его *дефектные подпространства*, а $n_{\pm}(A) := \dim \mathfrak{N}_{\pm i}(A)$ – его *индексы дефекта*. Также будем считать, что $n_+(A) = n_-(A) \leq \infty$.

Определение 1 ([16, 1]). Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой \mathcal{H} – гильбертово пространство, а Γ_0 и Γ_1 – линейные отображения из $\text{dom}(A^*)$ в \mathcal{H} , называется *граничной тройкой оператора A^** , если:

(i) справедливо тождество Грина

$$(2.1) \quad (A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1f, \Gamma_0g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0f, \Gamma_1g)_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \text{dom}(A^*);$$

(ii) отображение $\Gamma : f \mapsto \{\Gamma_0f, \Gamma_1f\}$ из $\text{dom}(A^*)$ в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ сюръективно.

Граничная тройка для оператора A^* существует, только когда $n_+(A) = n_-(A)$. В этом случае $n_{\pm}(A) = \dim \mathcal{H}$ и $\text{ker}(\Gamma) = \text{ker}(\Gamma_0) \cap \text{ker}(\Gamma_1) = \text{dom}(A)$.

Расширение \tilde{A} оператора A называют *собственным*, если $\text{dom}(A) \subset \text{dom}(\tilde{A}) \subset \text{dom}(A^*)$. Множество всех собственных (не обязательно замкнутых) расширений оператора A обозначают Ext_A .

Предложение 1. [16] Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка для оператора A^* . Тогда отображение $\Gamma = \{\Gamma_0, \Gamma_1\} : \text{dom}(A^*) \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ задает биективное соответствие между Ext_A и множеством всех линейных отношений в \mathcal{H} следующим образом

$$(2.2) \quad \Theta \mapsto A_{\Theta} := A^* \upharpoonright_{\{f \in \text{dom}(A^*) : \{\Gamma_0f, \Gamma_1f\} \in \Theta\}}.$$

При этом справедливы соотношения:

- (i) $A_{\Theta}^* = A_{\Theta^*}$;
- (ii) $A_{\Theta} \in \mathcal{C}(\mathfrak{H})$ в точности тогда, когда $\Theta \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$;
- (iii) $A_{\Theta_1} \subseteq A_{\Theta_2}$ в точности тогда, когда $\Theta_1 \subseteq \Theta_2$;
- (iv) A_{Θ} – симметрическое (самосопряженное) расширение в точности тогда, когда линейное отношение Θ симметрическое (самосопряженное). В частности, $n_{\pm}(A_{\Theta}) = n_{\pm}(\Theta)$;

(v) Пусть $A_\Theta = A_\Theta^*$ и $A_{\tilde{\Theta}} = A_{\tilde{\Theta}}^*$. Тогда для каждого $p \in (0, +\infty]$ справедлива эквивалентность

$$(A_\Theta - i)^{-1} - (A_{\tilde{\Theta}} - i)^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{H}) \iff (\Theta - i)^{-1} - (\tilde{\Theta} - i)^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}).$$

Если к тому же $\text{dom}(\Theta) = \text{dom}(\tilde{\Theta})$, то справедлива импликация

$$\overline{\Theta - \tilde{\Theta}} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}) \implies (A_\Theta - i)^{-1} - (A_{\tilde{\Theta}} - i)^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{H}).$$

Отношение Θ называют *граничным отношением* оператора $\tilde{A} = A_\Theta$. Если Θ является графиком линейного оператора B , $\Theta = \text{gr } B$, то область определения расширения $A_\Theta = A_B$ описывается следующим образом:

$$(2.3) \quad \text{dom}(A_B) = \{f \in \text{dom}(A^*) : \Gamma_1 f = B\Gamma_0 f\} = A^* \upharpoonright_{\ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0)}.$$

При этом оператор B называют *граничным оператором* расширения A_B .

С каждой граничной тройкой естественным образом связаны два расширения

$$A_0 := A^* \upharpoonright_{\ker(\Gamma_0)}, \quad A_1 := A^* \upharpoonright_{\ker(\Gamma_1)}.$$

Очевидно, что $A_0 = A_{\Theta_0}$ и $A_1 = A_{\Theta_1}$, где $\Theta_0 = \{0\} \times \mathcal{H}$ и $\Theta_1 = \mathcal{H} \times \{0\}$. Нетрудно получить из Предложения 1(iv), что $A_0 = A_0^*$ и $A_1 = A_1^*$.

Определение 2. [16] Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка для A^* . Операторно-значная функция $M(\cdot)$, определяемая равенством

$$M(z)\Gamma_0 f_z = \Gamma_1 f_z, \quad f_z \in \mathfrak{N}_z(A), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

называется *функцией Вейля*, соответствующей граничной тройке Π .

Напомним, что функция Вейля M принадлежит классу функций Неванлинны $R[\mathcal{H}]$, то есть $M : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow [\mathcal{H}]$ голоморфна, а также

$$\text{Im } z \text{ Im } M(z) > 0, \quad M(z) = M^*(\bar{z}), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

2.3. Расширения полуограниченного оператора. Пусть $A \in \mathcal{C}(\mathfrak{H})$ – плотно заданный полуограниченный симметрический оператор, $A \geq aI_{\mathfrak{H}}$. Будем обозначать его фридрихово расширение через A_F . Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – некоторая граничная тройка для A^* , и $M(\cdot)$ – соответствующая функция Вейля. Во-первых, отметим, что существует следующий сильный резольвентный предел (см. [16])

$$(2.4) \quad M(a) := s - R - \lim_{x \uparrow a} M(x).$$

Предложение 2 ([16, 17]). Пусть $A \geq aI_{\mathfrak{H}}$ с некоторым $a \geq 0$ и $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка для A^* такая, что $A_0 = A_F$. Пусть также $\Theta = \Theta^* \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ и A_Θ – соответствующее самосопряженное расширение. Если $M(a) \in [\mathcal{H}]$, то:

- (i) $A_\Theta \geq aI_{\mathfrak{H}}$ в точности тогда, когда $\Theta - M(a) \geq \mathbb{O}_{\mathcal{H}}$;
- (ii) $\kappa_-(A_\Theta - aI_{\mathfrak{H}}) = \kappa_-(\Theta - M(a))$.

Если дополнительно A – положительно определен, то есть $a > 0$, то:

- (iii) A_Θ положительно определен в точности тогда, когда линейное отношение $\Theta - M(0)$ положительно определено;
- (iv) для каждого $p \in (0, \infty]$ верна эквивалентность

$$E_{A_\Theta}(\mathbb{R}_-)A_\Theta \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{H}) \iff E_{\Theta - M(0)}(\mathbb{R}_-)(\Theta - M(0)) \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}).$$

Здесь $\kappa_-(T)$ – размерность "отрицательного" подпространства оператора $T = T^*$, т. е. $\kappa_-(T) = \dim E_T(\mathbb{R}_-)$, где E_T – спектральная мера оператора T .

Предложение 3. [16] Пусть $A \geq 0$ и $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка для A^* такая, что $A_0 = A_F$. Тогда следующие утверждения

- (i) линейное отношение $\Theta = \Theta^* \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ полуограничено снизу;
- (ii) самосопряженное расширение A_Θ полуограничено снизу;

эквивалентны, если и только если $M(x)$ равномерно стремится к $-\infty$ при $x \rightarrow -\infty$, то есть для любого $a > 0$ найдется $x_a < 0$, такое что $M(x) < -aI_{\mathcal{H}}$ для всех $x < x_a$ (в этом случае пишут $M(x) \rightrightarrows -\infty$ при $x \rightarrow -\infty$).

Замечание 1. Согласно [16, Предложение 4]), что $A_0 = A_F$ в точности тогда, когда для всех $f \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (M(x)f, f)_{\mathcal{H}} = -\infty,$$

где $M(\cdot)$ – соответствующая функция Вейля. Однако, при этом $M(x)$ не обязана равномерно стремиться к $-\infty$ при $x \rightarrow -\infty$ (см. [16, стр. 23]).

2.4. Прямые суммы граничных троек. Пусть S_k – плотно заданный симметрический оператор в гильбертовом пространстве \mathfrak{H}_k , $k \in \mathbb{N}$. Будем считать, что $n_+(S_k) = n_-(S_k) \leq \infty$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим оператор $A := \bigoplus_{k=1}^{\infty} S_k$, действующий в $\mathfrak{H} := \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathfrak{H}_k$. Ясно, что

$$A^* = \bigoplus_{k=1}^{\infty} S_k^*, \quad \text{dom}(A^*) = \left\{ \bigoplus_{k=1}^{\infty} f_k \in \mathfrak{H} : f_k \in \text{dom}(S_k^*), \sum_{k=1}^{\infty} \|S_k^* f_k\|_{\mathfrak{H}_k}^2 < \infty \right\}.$$

Пусть $\Pi_k = \{\mathcal{H}_k, \Gamma_0^k, \Gamma_1^k\}$ – граничные тройки для операторов S_k^* , $k \in \mathbb{N}$. Полагая $\mathcal{H} := \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_k$, определим отображения Γ_0 и Γ_1 следующим образом

$$\Gamma_j := \bigoplus_{k=1}^{\infty} \Gamma_j^k, \quad \text{dom}(\Gamma_j) = \left\{ f = \bigoplus_{k=1}^{\infty} f_k \in \text{dom}(A^*) : \sum_{k=1}^{\infty} \|\Gamma_j^k f_k\|_{\mathcal{H}_k}^2 < \infty \right\}.$$

Определение 3. [13, 23] Пусть $\mathcal{H} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_k$ и отображения Γ_j определены в (2.5). Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ называется прямой суммой граничных троек и обозначается $\Pi := \bigoplus_{k=1}^{\infty} \Pi_k$.

Прямая сумма граничных троек $\Pi := \bigoplus_{k=1}^{\infty} \Pi_k$, вообще говоря, не является граничной тройкой для оператора $A^* = \bigoplus_{k=1}^{\infty} S_k^*$ (см. [13, §3], [23, §3], а также [24]). В заключение лишь отметим, что в [13, 23] были предложены процедуры "регуляризации" граничных троек Π_k , позволяющие получать граничную тройку из суммы модифицированных граничных троек $\tilde{\Pi}_k$.

3. Оператор Шредингера с δ -взаимодействиями в пространстве вектор-функций. Пусть $X = \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ – строго возрастающая последовательность и $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \infty$. Положим

$$(3.1) \quad d_k := x_k - x_{k-1}, \quad r_k := \sqrt{d_k + d_{k+1}}$$

для всех $k \in \mathbb{N}$ и всюду в дальнейшем будем считать, что

$$(3.2) \quad d^* := \sup_{k \in \mathbb{N}} d_k < \infty.$$

Пусть также $\Lambda = \{\Lambda_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{C}^{p \times p}$, причем $\Lambda_k = \Lambda_k^*$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим формальное дифференциальное выражение

$$(3.3) \quad l_{X,\Lambda} := -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_p + \sum_{k=1}^\infty \Lambda_k \delta(x - x_k),$$

с которым в $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^p)$ ассоциируют следующий дифференциальный оператор

$$(3.4) \quad \begin{aligned} H_{X,\Lambda}^0 &:= -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_p, \\ \text{dom}(H_{X,\Lambda}^0) &= \left\{ f \in W_{\text{comp}}^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^p) : \begin{aligned} &f'(0) = 0, \quad f(x_k+) = f(x_k-) \\ &f'(x_k+) - f'(x_k-) = \Lambda_k f(x_k) \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Его замыкание обозначим через $H_{X,\Lambda}$, $H_{X,\Lambda} := \overline{H_{X,\Lambda}^0}$. Мы изучаем $H_{X,\Lambda}$ в рамках теории расширений, рассматривая его как собственное расширение оператора

$$(3.5) \quad H_{\min} = \bigoplus_{k=1}^\infty H_k, \quad H_k = -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_p, \quad \text{dom}(H_k) = W_0^{2,2}([x_{k-1}, x_k]; \mathbb{C}^p).$$

Легко видеть, что

$$(3.6) \quad H_{\min}^* = \bigoplus_{k=1}^\infty H_k^*, \quad \text{dom}(H_{\min}^*) = W^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^p).$$

4. Граничные тройки и параметризация оператора $H_{X,\Lambda}$. Прежде чем формулировать результаты, нам понадобится один простой факт. Пусть A – плотно заданный симметрический оператор в \mathfrak{H} и $n_+(A) = n_-(A) \leq \infty$. Пусть \mathcal{K} – другое гильбертово пространство. В новом гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_\otimes := \mathfrak{H} \otimes \mathcal{K}$ рассмотрим оператор $A_\otimes := A \otimes I_{\mathcal{K}}$. Очевидно, что A_\otimes – симметрический плотно заданный оператор в \mathfrak{H}_\otimes и

$$A_\otimes^* = A^* \otimes I_{\mathcal{K}}, \quad \text{dom}(A_\otimes^*) = \text{dom}(A^*) \otimes \mathcal{K}.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка для A^* , а $m(\cdot)$ – соответствующая функция Вейля. Тогда совокупность $\Pi_\otimes = \{\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}, \Gamma_0 \otimes I_{\mathcal{K}}, \Gamma_1 \otimes I_{\mathcal{K}}\}$ будет граничной тройкой для оператора A_\otimes^* , а $M(\cdot) := m(\cdot) \otimes I_{\mathcal{K}}$ – соответствующей функцией Вейля.

Используя Лемму 1 и результаты работы [13], нетрудно построить граничную тройку для оператора H_{\min}^* . Для операторов H_k^* , $k \in \mathbb{N}$, рассмотрим сначала граничные тройки $\tilde{\Pi}_k = \{\mathbb{C}^{2p}, \tilde{\Gamma}_0^k, \tilde{\Gamma}_1^k\}$ вида

$$(4.1) \quad \tilde{\Gamma}_0^k f := \begin{pmatrix} f(x_{k-1}+) \\ f'(x_k-) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_1^k f := \begin{pmatrix} f'(x_{k-1}+) \\ f(x_k-) \end{pmatrix}, \quad f \in W^{2,2}([x_{k-1}, x_k]; \mathbb{C}^p).$$

Соответствующая функция Вейля имеет вид

$$(4.2) \quad \tilde{M}_k(z) = \frac{1}{\cos(\sqrt{z}d_k)} \begin{pmatrix} \sqrt{z} \sin(\sqrt{z}d_k) & 1 \\ 1 & \sin(\sqrt{z}d_k)/\sqrt{z} \end{pmatrix} \otimes I_p, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Прямая сумма $\tilde{\Pi} = \bigoplus_{k=1}^\infty \tilde{\Pi}_k$ является граничной тройкой для $H_{\min}^* = \bigoplus_{k=1}^\infty H_k^*$ тогда и только тогда, когда $\inf_{k \in \mathbb{N}} d_k > 0$ (см. [13]). В связи с этим в [23] (см.

также [13]) была предложена процедура "регуляризации" исходных троек $\widetilde{\Pi}_k$. А именно, полагая

$$(4.3) \quad R_k := \begin{pmatrix} d_k^{1/2} & 0 \\ 0 & d_k^{3/2} \end{pmatrix} \otimes I_p, \quad Q_k := \widetilde{M}_k(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_k \end{pmatrix} \otimes I_p$$

и

$$(4.4) \quad \Gamma_0^k := R_k \widetilde{\Gamma}_0^k, \quad \Gamma_1^k := R_k^{-1} (\widetilde{\Gamma}_1^k - Q_k \widetilde{\Gamma}_0^k),$$

получим новые регуляризованные тройки $\Pi_k = \{\mathbb{C}^{2p}, \Gamma_0^k, \Gamma_1^k\}$ для операторов H_k^* . Применяя Лемму 1 и [13, Теорему 4.7], приходим к следующему результату.

Предложение 4. (i) Совокупность $\Pi = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \Pi_k = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^{2p})$ и граничные тройки $\Pi_k = \{\mathbb{C}^{2p}, \Gamma_0^k, \Gamma_1^k\}$ имеют вид

$$(4.5) \quad \Gamma_0^k f := \begin{pmatrix} d_k^{1/2} f(x_{k-1}+) \\ d_k^{3/2} f'(x_k-) \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_1^k f := \begin{pmatrix} d_k^{-1/2} (f'(x_{k-1}+) - f'(x_k-)) \\ d_k^{-3/2} (f(x_k-) - f(x_{k-1}+)) - d_k^{-1/2} f'(x_k-) \end{pmatrix},$$

образует граничную тройку для оператора $H_{\min}^* = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_k^*$.

(ii) Соответствующая функция Вейля имеет вид

$$(4.6) \quad M(z) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} M_k(z), \quad M_k(z) = R_k^{-1} (\widetilde{M}_k(z) - Q_k) R_k^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

где $\widetilde{M}_k(\cdot)$ и R_k, Q_k определены равенствами (4.2) и (4.3), соответственно.

Теперь, используя Предложение 1, мы можем представить оператор $H_{X,\Lambda}$ в виде (2.3). Для этого определим блочную матрицу Якоби

$$(4.7) \quad B_{X,\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_p & -d_1^{-2} I_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ -d_1^{-2} I_p & -d_1^{-2} I_p & d_1^{-3/2} d_2^{-1/2} I_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & d_1^{-3/2} d_2^{-1/2} I_p & d_2^{-1} \Lambda_1 & -d_2^{-2} I_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & -d_2^{-2} I_p & -d_2^{-2} I_p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Оказывается, что минимальный оператор, задаваемый матрицей (4.7) в $\ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p)$, и за которым мы сохраним обозначение $B_{X,\Lambda}$, будет граничным оператором для $H_{X,\Lambda}$.

Предложение 5. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка для оператора H_{\min}^* , построенная в Предложении 4. Тогда

$$(4.8) \quad \text{dom}(H_{X,\Lambda}) = \{f \in W^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^p) : \Gamma_1 f = B_{X,\Lambda} \Gamma_0 f\}.$$

Доказательство. Обозначим через $B_{X,\Lambda}^0$ оператор, задаваемый матрицей (4.7) в $\ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p)$ на области $\text{dom}(B_{X,\Lambda}^0) = \ell_0^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p)$. Покажем, что

$$(4.9) \quad \text{dom}(H_{X,\Lambda}^0) = \{f \in W_{\text{comp}}^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^p) : \Gamma_1 f = B_{X,\Lambda}^0 \Gamma_0 f\}.$$

Пусть $\tilde{\Gamma}_j := \bigoplus_{k=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_j^k$, $j \in \{0, 1\}$, а отображения $\tilde{\Gamma}_j^k$, $k \in \mathbb{N}$ определены в (4.1). Тогда $\tilde{\Gamma}_j f \in \ell_0^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^{2p})$ для всех $f \in W_{\text{comp}}^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^2)$. Полагая

$$(4.10) \quad \tilde{B}_\Lambda := \begin{pmatrix} \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \cdots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \cdots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{I}_p & \Lambda_1 & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \cdots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{I}_p & \cdots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{I}_p & \Lambda_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

и проводя несложные вычисления, придем к заключению: $f \in \text{dom}(H_{X,\Lambda}^0)$ в точности тогда, когда $\tilde{\Gamma}_1 f = \tilde{B}_\Lambda \tilde{\Gamma}_0 f$. Теперь из (4.3) и (4.4) вытекает следующая связь между матрицами \tilde{B}_Λ и $B_{X,\Lambda}$

$$(4.11) \quad B_{X,\Lambda} = R_X^{-1}(\tilde{B}_\Lambda - Q_X)R_X^{-1}, \quad R_X := \bigoplus_{k=1}^{\infty} R_k, \quad Q_X := \bigoplus_{k=1}^{\infty} Q_k,$$

что, в свою очередь, доказывает (4.9). Осталось заметить, что $H_{X,\Lambda} = \overline{H_{X,\Lambda}^0} = \overline{H_{B_{X,\Lambda}}^0} = H_{B_{X,\Lambda}}$ (см. Предложение 1(i)). \square

В дальнейшем нам понадобится еще одна граничная тройка. А именно, для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим отображения $\tilde{\Gamma}_0^k, \tilde{\Gamma}_1^k : W^{2,2}([x_{k-1}, x_k]; \mathbb{C}^p) \rightarrow \mathbb{C}^{2p}$, полагая

$$(4.12) \quad \tilde{\Gamma}_0^k f := \begin{pmatrix} f(x_{k-1}+) \\ -f(x_k-) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_1^k f := \begin{pmatrix} f'(x_{k-1}+) \\ f'(x_k-) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить (см. [13]), что соответствующая функция Вейля имеет вид

$$(4.13) \quad \tilde{M}_k(z) = -\frac{\sqrt{z}}{\sin(\sqrt{z}d_k)} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{z}d_k) & 1 \\ 1 & \cos(\sqrt{z}d_k) \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_p, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Как и в предыдущем случае, прямая сумма $\tilde{\Pi} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \tilde{\Pi}_k$ не будет граничной тройкой для оператора $H_{\min}^* = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_k^*$, если $\inf_{k \in \mathbb{N}} d_k = 0$. Полагая

$$(4.14) \quad R_k := \begin{pmatrix} \sqrt{d_k} & 0 \\ 0 & \sqrt{d_k} \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_p, \quad Q_k := \tilde{M}_k(0) = -\frac{1}{d_k} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_p,$$

рассмотрим новую граничную тройку $\Pi_k = \{\mathbb{C}^{2p}, \Gamma_0^k, \Gamma_1^k\}$, в которой отображения Γ_0^k и Γ_1^k получены из (4.12) при помощи (4.4). Из Леммы 1 и [13, Теорема 4.1] легко следует следующее утверждение.

Предложение 6. (i) Совокупность $\Pi = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \Pi^k = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^{2p})$ и граничные тройки $\Pi_k = \{\mathbb{C}^{2p}, \Gamma_0^k, \Gamma_1^k\}$ имеют вид

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \Gamma_0^k f &:= \begin{pmatrix} d_k^{1/2} f(x_{k-1}+) \\ -d_k^{1/2} f(x_k-) \end{pmatrix}, \\ \Gamma_1^k f &:= \begin{pmatrix} d_k^{-1/2} f'(x_{k-1}+) + d_k^{-3/2} (f(x_{k-1}+) - f(x_k-)) \\ d_k^{-1/2} f'(x_k-) + d_k^{-3/2} (f(x_{k-1}+) - f(x_k-)) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

образует граничную тройку для оператора $H_{\min}^* = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_k^*$.

(ii) Соответствующая функция Вейля имеет вид

$$(4.16) \quad M(z) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} M_k(z), \quad M_k(z) = R_k^{-1}(\widetilde{M}_k(z) - Q_k)R_k^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

где $\widetilde{M}_k(\cdot)$ и R_k, Q_k определены равенствами (4.13) и (4.14), соответственно.

Функция Вейля (4.16) обладает важным свойством.

Следствие 1. Пусть $M(\cdot)$ – функция Вейля из Предложения 6. Тогда

$$(4.17) \quad M(x) \rightrightarrows -\infty \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty.$$

Доказательство. В силу (4.13) и (4.14) функция Вейля (4.16) допускает представление $M(\cdot) = m(\cdot) \otimes I_p$, в котором $m(\cdot)$ – функция Вейля тройки (4.15) при $p = 1$. Но, согласно [13, Предложение 4.4], $m(x) \rightrightarrows -\infty$ при $x \rightarrow -\infty$. \square

Рассмотрим теперь матрицу

$$(4.18) \quad B_{X,\Lambda} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1 d_2} I_p + \frac{1}{d_1 + d_2} \Lambda_1 & \frac{-1}{r_1 r_2 d_2} I_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \frac{-1}{r_1 r_2 d_2} I_p & \frac{1}{d_2 d_3} I_p + \frac{1}{d_2 + d_3} \Lambda_2 & \frac{-1}{r_2 r_3 d_3} I_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \frac{-1}{r_2 r_3 d_3} I_p & \frac{1}{d_3 d_4} I_p + \frac{1}{d_3 + d_4} \Lambda_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Как и ранее, минимальный и преминальный операторы, ассоциированные с этой матрицей в $\ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p)$, будем обозначать $B_{X,\Lambda}$ и $B_{X,\Lambda}^0$, соответственно.

Предложение 7. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка для оператора H_{\min}^* , построенная в Предложении 6. Тогда

$$(4.19) \quad \text{dom}(H_{X,\Lambda}) = \{f \in W^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^p) : \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\} \in \Theta_{X,\Lambda}\},$$

где $\Theta_{X,\Lambda}$ – симметрическое линейное отношение, операторная часть которого $\Theta_{X,\Lambda}^{\text{op}}$ унитарно эквивалентна минимальному оператору (4.18).

Доказательство. Пусть $\widetilde{\Gamma}_j := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \widetilde{\Gamma}_j^k$, $j \in \{0, 1\}$, где $\widetilde{\Gamma}_j^k$ определены в (4.12).

Очевидно, что $\widetilde{\Gamma}_j f \in \ell_0^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^{2p})$ для всех $f \in \text{dom}(H_{X,\Lambda}^0)$. Положим

$$C := \begin{pmatrix} \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & -I_p & I_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & -I_p & I_p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad D_\Lambda := \begin{pmatrix} I_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & I_p & I_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \Lambda_1 & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & I_p & I_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \Lambda_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $f \in \text{dom}(H_{X,\Lambda}^0)$ в точности тогда, когда $C\widetilde{\Gamma}_1 f = D_\Lambda \widetilde{\Gamma}_0 f$. Поэтому, полагая

$$C_{X,\Lambda} := CR_X, \quad D_{X,\Lambda} := (D_\Lambda - CQ_X)R_X^{-1},$$

где $R_X = \bigoplus_{k=1}^{\infty} R_k$, $Q_X = \bigoplus_{k=1}^{\infty} Q_k$, а R_k и Q_k определены в (4.14), и учитывая (4.4), мы заключаем, что $f \in \text{dom}(H_{X,\Lambda}^0)$ в точности тогда, когда

$$(4.20) \quad C_{X,\Lambda} \Gamma_1 f = D_{X,\Lambda} \Gamma_0 f,$$

где Γ_0 и Γ_1 – отображения, построенные в Предложении 6.

Определим теперь линейное отношение $\Theta_{X,\Lambda}^0$ в $\ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p)$

$$\Theta_{X,\Lambda}^0 = \{ \{f, g\} \in \ell_0^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p) \times \ell_0^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p) : D_{X,\Lambda}f = C_{X,\Lambda}g \}.$$

Во-первых, $\text{dom}(H_{X,\Lambda}^0) = \{f \in W_{\text{comp}}^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^p) : \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\} \in \Theta_{X,\Lambda}^0\}$. Также легко убедиться в том, что $\Theta_{X,\Lambda}^0$ – симметрическое линейное отношение. Обозначим его замыкание через $\Theta_{X,\Lambda} := \overline{\Theta_{X,\Lambda}^0}$. Тогда $\Theta_{X,\Lambda}$ – симметрическое и, следовательно, для него справедливо разложение $\Theta_{X,\Lambda} = \Theta_{X,\Lambda}^{\text{op}} \oplus \Theta_{X,\Lambda}^\infty$, в котором $\Theta_{X,\Lambda}^{\text{op}}$ – операторная часть $\Theta_{X,\Lambda}$, а $\Theta_{X,\Lambda}^\infty = \{0\} \times \text{mul}(\Theta_{X,\Lambda})$.

Из определения находим

$$\text{mul}(\Theta_{X,\Lambda}) = \overline{\text{mul}(\Theta_{X,\Lambda}^0)} = \ker C_{X,\Lambda} = \overline{R_X^{-1} \ker(C)}$$

и

$$\mathcal{H}_{\text{op}} = \overline{\text{dom}(\Theta_{X,\Lambda})} = \overline{\text{ran}(C_{X,\Lambda}^*)}.$$

Следовательно, $f = \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}_{\text{op}}$ в точности тогда, когда $f_1 = 0$ и $r_{k+1}f_{2k} + r_k f_{2k+1} = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть \mathbf{f}_k имеет следующий вид

$$\mathbf{f}_k = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{-\sqrt{d_k}f_k}_{2k}, \underbrace{\sqrt{d_{k+1}}f_k}_{2k+1}, 0, \dots), \quad f_k \in \mathbb{C}^p.$$

Очевидно, что $\mathbf{f}_k \perp \mathbf{f}_n$, если $k \neq n$. Определим $\mathcal{H}_k := \{\mathbf{f}_k : f_k \in \mathbb{C}^p\}$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $\dim \mathcal{H}_k = p$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Более того $\mathcal{H}_{\text{op}} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_k$. Обозначим через P_k – ортопроектор в $\ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p)$ на подпространство \mathcal{H}_k .

Покажем, что $\mathbf{f}_k \in \text{dom}(\Theta_{X,\Lambda})$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Для этого достаточно указать $\mathbf{g}_k = \{\mathbf{g}_{k,j}\}_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p) \times \ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^p)$ такой, что $\{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_k\} \in \Theta_{X,\Lambda}$, то есть

$$(4.21) \quad C_{X,\Lambda} \mathbf{g}_k = D_{X,\Lambda} \mathbf{f}_k.$$

Сначала заметим, что

$$D_{X,\Lambda} \mathbf{f}_1 = (0, 0, \Lambda_1 f_1 + (d_1^{-1} + d_2^{-1})f_1, 0, d_2^{-1}f_1, 0, \dots)$$

и

$$D_{X,\Lambda} \mathbf{f}_k = (0, \dots, 0, \underbrace{d_k^{-1}f_k}_{2k-1}, 0, \underbrace{\Lambda_k f_k + (d_k^{-1} + d_{k+1}^{-1})f_k}_{2k+1}, 0, \underbrace{d_{k+1}^{-1}f_k}_{2k+3}, 0, \dots),$$

для всех $k \geq 2$. Так как

$$C_{X,\Lambda} \mathbf{g}_k = C R_X \mathbf{g}_k = (0, 0, -\sqrt{d_1} \mathbf{g}_{k,2} + \sqrt{d_2} \mathbf{g}_{k,3}, 0, -\sqrt{d_2} \mathbf{g}_{k,4} + \sqrt{d_3} \mathbf{g}_{k,5}, 0, \dots),$$

то из системы уравнений (4.21) мы заключаем, что \mathbf{g}_k имеет вид $\mathbf{g}_k = \tilde{\mathbf{g}}_k + \mathbf{g}$, где $\mathbf{g} \in \text{mul}(\Theta_{X,\Lambda})$, $\tilde{\mathbf{g}}_k \in \mathcal{H}_{\text{op}}$ и

$$\begin{aligned} P_{k-1} \tilde{\mathbf{g}}_k &= \frac{-1}{r_{k-1} d_k} f_k, & P_{k+1} \tilde{\mathbf{g}}_k &= \frac{-1}{r_{k+1} d_{k+1}} f_k, \\ P_k \tilde{\mathbf{g}}_k &= r_k \left(\frac{1}{d_k d_{k+1}} f_k + \frac{1}{d_k + d_{k+1}} \Lambda_k f_k \right), \end{aligned}$$

и $P_j \tilde{\mathbf{g}}_k = 0$ для всех $|j - k| > 1$. Из этого также следует, что $\{\mathbf{f}_k, \tilde{\mathbf{g}}_k\} \in \Theta_{X,\Lambda}^{\text{op}}$ и кроме того, матричное представление $\Theta_{X,\Lambda}^{\text{op}}$ относительно разложения $\mathcal{H}_{\text{op}} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_k$ задается блочной якобиевой матрицей (4.18). \square

5. Индексы дефекта оператора $H_{X,\Lambda}$. В [12, 13] показано, что в скалярном случае спектральные свойства оператора $H_{X,\Lambda}$ тесно связаны со свойствами специальных матриц Якоби. Здесь мы проследим эту аналогию для матричного случая. Следующий результат обобщает Теорему 5.4 из [13] на случай $p > 1$.

Теорема 1. Пусть $B_{X,\Lambda}$ – минимальный оператор, задаваемый одной из матриц (4.7) или (4.18). Тогда

$$(5.1) \quad n_{\pm}(H_{X,\Lambda}) = n_{\pm}(B_{X,\Lambda}) \leq p.$$

В частности, индексы дефекта минимальных операторов (4.7) и (4.18) совпадают.

Доказательство. Вытекает из сопоставления Предложений 5 и 7 с Предложением 1(iv). \square

Замечание 2. При дополнительном условии вещественности матриц $\Lambda_k = \Lambda_k^* \in \mathbb{R}^{p \times p}$ в [6, Теорема 3] было установлено другим методом, что $n_{\pm}(H_{X,\Lambda}) = p$ в точности тогда, когда $n_{\pm}(B_{X,\Lambda}) = p$, где $B_{X,\Lambda}$ – матрица вида (4.18).

Применяя известные результаты об индексах дефекта блочных матриц Якоби, Теорема 1 позволяет изучать индексы дефекта оператора $H_{X,\Lambda}$. Вообще говоря, индексы дефекта блочных матриц Якоби с невещественными матричными коэффициентами не обязательно равны (см., например, [25, 26]). Однако, они равны, если хотя бы один из них максимален, то есть равен p (см. [27]). Из этого факта и Теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. Если $n_{+}(H_{X,\Lambda}) = p$ или $n_{-}(H_{X,\Lambda}) = p$, то

$$(5.2) \quad n_{+}(H_{X,\Lambda}) = n_{-}(H_{X,\Lambda}) = p.$$

Следствие 3. Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = \infty,$$

то оператор $H_{X,\Lambda}$ самосопряжен.

Доказательство. Применяя матричный признак Карлемана (см., например, [19, Теорема 7.2.9]) к оператору (4.7) и отмечая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 + d_k^{3/2} d_{k+1}^{1/2} \geq \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = \infty,$$

получаем $B_{X,\Lambda} = B_{X,\Lambda}^*$. Остается применить Теорему 1. \square

Используя признак Березанского–Костюченко–Мирзоева (см. [22, Теорема 1]), можно получить условия максимальности индексов дефекта.

Предложение 8. Пусть $\{d_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ и

$$(5.3) \quad d_k d_{k+2} \geq d_{k+1}^2$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Если

$$(5.4) \quad \sum_{k=1}^{\infty} d_{k+1} \|\Lambda_k + (d_k^{-1} + d_{k+1}^{-1})I_p\|_{\mathbb{C}^p} < \infty,$$

то $n_{\pm}(H_{X,\Lambda}) = p$.

Доказательство. Покажем, что для матрицы $B_{X,\Lambda}$ вида (4.18) выполнены условия Теоремы 1 из [22]. Для этого обозначим

$$(5.5) \quad A_k := \frac{1}{d_k d_{k+1}} I_p + \frac{1}{d_k + d_{k+1}} \Lambda_k, \quad B_k := \frac{-1}{r_k r_{k+1} d_{k+1}} I_p, \quad k \in \mathbb{N},$$

и определим последовательность матриц $\{C_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{C}^{p \times p}$ следующим образом

$$C_1 := B_1^{-1}, \quad C_2 := I_p, \quad C_{k+1} := -B_k^{-1} B_{k-1} C_{k-1} = -\frac{r_{k+1} d_{k+1}}{r_{k-1} d_k} C_{k-1}, \quad k \geq 2.$$

Легко видеть, что

$$C_{k+1} = (-1)^{k+1} r_{k+1} \frac{d_{k+1} d_{k-1} \cdots}{d_k d_{k-2} \cdots} \times \begin{cases} r_1^{-1} B_1^{-1}, & k = 2n+1, \\ r_2^{-1} I_p, & k = 2n. \end{cases}, \quad .$$

Из условия (5.3) приходим к неравенству

$$\frac{d_{k+1} d_{k-1} \cdots}{d_k d_{k-2} \cdots} = \sqrt{d_{k+2}} \frac{d_{k+1}}{\sqrt{d_{k+2} d_k}} \frac{d_{k-1}}{\sqrt{d_k d_{k-2}}} \times \cdots \times c_k \leq \frac{\sqrt{d_{k+2}}}{\min\{\sqrt{d_2}, \sqrt{d_3}\}},$$

для всех $k \in \mathbb{N}$, где

$$c_k = \begin{cases} 1/\sqrt{d_2}, & k = 2n, \\ 1/\sqrt{d_3}, & k = 2n+1. \end{cases}$$

Следовательно

$$(5.6) \quad \|C_{k+1}\| \leq c r_{k+1} \sqrt{d_{k+2}} = c \sqrt{d_{k+2} d_{k+1} + d_{k+2}^2} \leq c(d_{k+1} + d_{k+2}),$$

где $c > 0$ – некоторая константа, независимая от $k \in \mathbb{N}$. Во-первых, из этих неравенств, а также условия $\{d_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ мы получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|C_k\|^2 < \infty.$$

Кроме того, из (5.6) с учетом условия (5.4) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \|C_k^* A_k C_k\| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|C_k\|^2 \|A_k\| \leq c^2 \sum_{k=1}^{\infty} d_{k+1} r_k^2 \|A_k\| \\ &= c^2 \sum_{k=1}^{\infty} d_{k+1} \|\Lambda_k + (d_k^{-1} + d_{k+1}^{-1}) I_p\| < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, $n_{\pm}(B_{X,\Lambda}) = p$ по Теореме 1 из [22]. Осталось применить Теорему 1. \square

Замечание 3. Следствие 3 и Предложение 8 в скалярном случае ($p = 1$) доказаны в [13]. В случае $p > 1$ эти результаты получены другим методом в [6] при дополнительном условии вещественности матриц Λ_k .

Приведем теперь примеры операторов $H_{X,\Lambda}$ таких, что $n_{\pm}(H_{X,\Lambda}) = p_1$ с $0 < p_1 < p$. Пусть $p = p_1 + p_2$ с некоторыми натуральными p_1 и p_2 . Представим каждую матрицу $\Lambda_k \in \mathbb{C}^{p \times p}$ в виде

$$(5.7) \quad \Lambda_k = \begin{pmatrix} \Lambda_k^{11} & \Lambda_k^{12} \\ \Lambda_k^{21} & \Lambda_k^{22} \end{pmatrix}, \quad \Lambda_k^{ij} \in \mathbb{C}^{p_i \times p_j}, \quad i, j \in \{1, 2\}.$$

Предложение 9. Пусть $\{d_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^2(\mathbb{N})$ – невозрастающая последовательность такая, что для всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено условие (5.3). Пусть также матрицы $\Lambda_k = \Lambda_k^*$ удовлетворяют следующим условиям:

- (i) матрицы Λ_k^{11} , $k \in \mathbb{N}$ удовлетворяют условию (5.4) с p_1 вместо p ;
- (ii)

$$\|\Lambda_k^{12}\|_{\mathbb{C}^{p_1 \times p_2}} = \mathcal{O}(d_k), \quad k \rightarrow \infty;$$

- (iii)

$$\Lambda_k^{22} = \widehat{\Lambda}_k^{22} + \widetilde{\Lambda}_k^{22},$$

причем $\|\widetilde{\Lambda}_k^{22}\|_{\mathbb{C}^{p_2 \times p_2}} = \mathcal{O}(d_k)$ при $k \rightarrow \infty$, а $\widehat{\Lambda}_k^{22} = \text{diag}(\alpha_{k,j})_{j=1}^{p_2}$ – диагональные матрицы такие, что либо

$$(5.8) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{k,j}| d_k^3 = \infty, \quad j \in \{1, \dots, p_2\},$$

либо найдется постоянная $M > 0$ такая, что для всех $k \in \mathbb{N}$ и $j \in \{1, \dots, p_2\}$

$$(5.9) \quad \frac{4}{d_{k+1}^2} + \frac{\alpha_{k,j}}{d_{k+1}} \leq M.$$

Тогда $n_{\pm}(H_{X,\Lambda}) = p_1$.

Доказательство. Рассмотрим якобиеву матрицу (4.18). Из условий (ii) и (iii) следует, что $B_{X,\Lambda}$ является ограниченным возмущением матрицы $B_{X,\widehat{\Lambda}}$, в которой

$$\widehat{\Lambda}_k = \Lambda_k^{11} \oplus \widehat{\Lambda}_k^{22}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Так как $n_{\pm}(B_{X,\Lambda}) = n_{\pm}(B_{X,\widehat{\Lambda}})$, то, согласно Теореме 1, $n_{\pm}(H_{X,\Lambda}) = n_{\pm}(H_{X,\widehat{\Lambda}}) = n_{\pm}(B_{X,\widehat{\Lambda}})$. Заметим, что оператор $H_{X,\widehat{\Lambda}}$ является прямой суммой операторов $H_{X,\Lambda^{11}}$ и $H_{X,\widehat{\Lambda}^{22}}$ относительно разложения $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^p) = L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{p_1}) \oplus L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{p_2})$. Значит,

$$n_{\pm}(H_{X,\Lambda}) = n_{\pm}(H_{X,\Lambda^{11}}) + n_{\pm}(H_{X,\widehat{\Lambda}^{22}}).$$

Применяя Предложение 8 к оператору $H_{X,\Lambda^{11}}$, получаем

$$n_{\pm}(H_{X,\Lambda^{11}}) = p_1.$$

Осталось доказать, что оператор $H_{X,\widehat{\Lambda}^{22}}$ самосопряжен, то есть $n_{\pm}(H_{X,\widehat{\Lambda}^{22}}) = 0$. Поскольку $\alpha_k^{22} = \text{diag}(\alpha_{k,j})_{j=1}^{p_2}$ – диагональные матрицы для всех $k \in \mathbb{N}$, то оператор $H_{X,\widehat{\Lambda}^{22}}$, в свою очередь, распадается в прямую сумму одномерных операторов H_{X,α_j} , где $\alpha_j = \{\alpha_{k,j}\}_{k=1}^\infty$, $j \in \{1, \dots, p_2\}$.

Предположим сначала, что выполнено условие (5.8). Учитывая монотонность последовательности $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ и неравенства $r_k \geq \sqrt{d_k}$ и $r_k \geq \sqrt{d_{k+1}}$, из (5.8) находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{k,j}| d_k d_{k+1} r_k r_{k+1} \geq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{k,j}| d_{k+1}^3 = \infty.$$

Согласно [13, Предложение 5.11(i)], $n_{\pm}(H_{X,\alpha_j}) = 0$ для всех $j \in \{1, \dots, p_2\}$.

Предположим теперь, что справедливы неравенства (5.9) с некоторой постоянной $M > 0$. Используя монотонность последовательности $\{d_k\}_{k=1}^\infty$, из неравенств (5.9) находим

$$\alpha_{k,j} + \frac{1}{d_k} \left(1 + \frac{r_k}{r_{k-1}}\right) + \frac{1}{d_{k+1}} \left(1 + \frac{r_k}{r_{k+1}}\right) \leq \alpha_{k,j} + \frac{4}{d_{k+1}} \leq M d_{k+1} < M(d_k + d_{k+1}).$$

Применяя [13, Предложение 5.11(ii)], заключаем, что $n_\pm(H_{X,\alpha_j}) = 0$ для всех $j \in \{1, \dots, p_2\}$ и, значит, $n_\pm(\hat{\Lambda}^{22}) = 0$. Это завершает доказательство. \square

Пример 1. Пусть $d_k = \frac{1}{k}$ и Λ_k имеют диагональный вид, $\Lambda_k = \text{diag}(\alpha_{k,j})_{j=1}^p$, для всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть также

$$\alpha_{k,j} = -2k - 1 + \mathcal{O}(k^{-1}), \quad j \in \{1, \dots, p_1\},$$

и

$$\alpha_{k,j} = -4k - 4 + \mathcal{O}(k^{-1}), \quad j \in \{p_1 + 1, \dots, p\}.$$

Нетрудно видеть, что матрицы $\Lambda_k^{11} = \text{diag}(\alpha_{k,j})_{j=1}^{p_1}$, $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяют (5.4). Кроме того, для всех $j \in \{p_1 + 1, \dots, p\}$ имеем

$$\frac{4}{d_{k+1}^2} + \frac{\alpha_{k,j}}{d_{k+1}} = 4(k+1)^2 - (k+1)(4k+4 + \mathcal{O}(k^{-1})) = \mathcal{O}(1)$$

при $k \rightarrow \infty$. Применяя Предложение 9, заключаем, что $n_\pm(H_{X,\Lambda}) = p_1$.

6. Спектральные свойства оператора $H_{X,\Lambda}$. Связь гамильтонианов (3.3) с якобиевыми матрицами (4.18) простирается значительно дальше равенства их индексов дефекта. Следующая теорема значительно расширяет список этих свойств.

Теорема 2. Пусть $B_{X,\Lambda}$ – минимальный оператор, задаваемый матрицей (4.18). Пусть также $B_{X,\Lambda} = B_{X,\Lambda}^*$ (а значит и $H_{X,\Lambda} = H_{X,\Lambda}^*$). Тогда:

- (i) операторы $H_{X,\Lambda}$ и $B_{X,\Lambda}$ полуограничены снизу лишь одновременно;
- (ii) операторы $H_{X,\Lambda}$ и $B_{X,\Lambda}$ неотрицательны (положительно определены) лишь одновременно. Более того,

$$(6.1) \quad \kappa_-(H_{X,\Lambda}) = \kappa_-(B_{X,\Lambda}).$$

В частности, отрицательные части спектров операторов $H_{X,\Lambda}$ и $B_{X,\Lambda}$ конечны или бесконечны лишь одновременно;

- (iii) для каждого $p \in (0, \infty]$ справедлива эквивалентность

$$E_{H_{X,\Lambda}}(\mathbb{R}_-)H_{X,\Lambda} \in \mathfrak{S}_p \iff E_{B_{X,\Lambda}}(\mathbb{R}_-)B_{X,\Lambda} \in \mathfrak{S}_p.$$

В частности, отрицательные части спектров операторов $H_{X,\Lambda}$ и $B_{X,\Lambda}$ дискретны лишь одновременно;

- (iv) $\sigma_c(H_{X,\Lambda}) \subset \mathbb{R}_+$ ($\sigma_c(H_{X,\Lambda}) \subseteq [0, \infty)$) в точности тогда, когда $\sigma_c(B_{X,\Lambda}) \subset \mathbb{R}_+$ ($\sigma_c(B_{X,\Lambda}) \subseteq [0, \infty)$);

- (v) спектр оператора $H_{X,\Lambda}$ дискретен в точности тогда, когда $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = 0$ и спектр матрицы $B_{X,\Lambda}$ дискретен;

- (vi) пусть $\tilde{\Lambda} = \{\tilde{\Lambda}_k\}$, где $\tilde{\Lambda}_k = \tilde{\Lambda}_k^* \in \mathbb{C}^{p \times p}$, $k \in \mathbb{N}$ и $B_{X,\tilde{\Lambda}}$ – минимальный оператор, ассоциированный с матрицей вида (4.18), построенной по последовательности $\tilde{\Lambda}$ вместо Λ . Если $H_{X,\tilde{\Lambda}} = H_{X,\tilde{\Lambda}}^*$, то для каждого $p \in (0, +\infty]$ справедлива эквивалентность:

$$(H_{X,\Lambda} - i)^{-1} - (H_{X,\tilde{\Lambda}} - i)^{-1} \in \mathfrak{S}_p \iff (B_{X,\Lambda} - i)^{-1} - (B_{X,\tilde{\Lambda}} - i)^{-1} \in \mathfrak{S}_p.$$

(vii) если $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{d_k + d_{k+1}} \|\Lambda_k\| < \infty$, то абсолютно непрерывная часть $H_{X,\Lambda}^{\text{ac}}$ оператора $H_{X,\Lambda}$ унитарно эквивалентна оператору H_N , где

$$H_N = -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_p, \quad \text{dom}(H_N) = \{W^{2,2}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^p) : f'(0) = 0\}.$$

Доказательство. (i) Рассмотрим граничную тройку Π для оператора H_{\min}^* , определенную в Предложении 6. Из (4.14) и (4.16) следует, что $M_k(0) = \mathbb{O}$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и, следовательно, из (4.16) и (2.4) получаем $M(0) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} M_k(0) = \mathbb{O}_{\mathcal{H}}$. В частности, $M(0) \in [\mathcal{H}]$. Кроме того,

$$(6.2) \quad H_0 := H_{\min}^* \upharpoonright_{\ker(\Gamma_0)} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H_k^F,$$

где H_k^F – это фридрихсово расширение оператора H_k . Хорошо известно, что

$$H_k^F = -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_p, \\ \text{dom}(H_k^F) = \{f \in W^{2,2}([x_{k-1}, x_k]; \mathbb{C}^p) : f(x_{k-1}+) = f(x_k-) = 0\}.$$

Следовательно, $H_0 = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H_k^F$ – фридрихсово расширение оператора H_{\min} (см., например, [23, Следствие 3.10]). Теперь утверждение о полуограниченности снизу следует из Предложения 7, Следствия 1 и Предложения 3.

(ii) Утверждение о неотрицательности вытекает из Предложения 2(i) с учетом равенства $M(0) = \mathbb{O}_{\mathcal{H}}$. В частности, равенство (6.1) следует из Предложения 2(ii). Чтобы доказать оставшуюся часть утверждения (ii), следует, согласно Предложению 2(iii), показать положительную определенность оператора H_0 . Так как

$$(6.3) \quad \sigma(H_k^F) = \left\{ \frac{\pi^2 j^2}{d_k^2} \right\}_{j \in \mathbb{N}},$$

то из определения (6.2) имеем

$$\inf \sigma(H_0) = \frac{\pi^2}{(d^*)^2}.$$

Следовательно, оператор H_0 положительно определен в силу условия (3.2).

(iii) Требуемая эквивалентность вытекает из Предложения 2(iv).

(iv) Вытекает из утверждения (ii) при $p = \infty$, т. к. $\sigma_c(T) = \{0\}$ для каждого компактного оператора T .

(v) Из (6.2) и (6.3) с очевидностью заключаем, что спектр оператора H_0 дискретен в точности тогда, когда $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = 0$. Осталось воспользоваться Предложением 1(v).

(vi) Вытекает из Предложения 7 и Предложения 1(v).

(vii) Легко видеть, что $H_N = H_{X,\mathbb{O}}$, то есть область определения оператора H_N можно представить в виде (4.19) с $\Theta = \Theta_{X,\mathbb{O}}$, в которой все $\Lambda_k = \mathbb{O}_p$. Следовательно, для любого $f \in \ell_0^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^P)$ имеем

$$B_{X,\Lambda} f - B_{X,\mathbb{O}} f = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{d_k + d_{k+1}} \Lambda_k f.$$

Поэтому $\overline{B_{X,\Lambda} - B_{X,\mathbb{O}}} \in \mathfrak{S}_1$ в точности тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{d_k + d_{k+1}} \|\Lambda_k\| < \infty$. В силу доказанного свойства (vi), заключаем

$$(H_{X,\Lambda} - i)^{-1} - (H^N - i)^{-1} \in \mathfrak{S}_1.$$

Применяя теорему Бирмана–Крейна (см., например, [28, Теорема XI.9]), получаем требуемое. \square

Авторы благодарны К. А. Мирзоеву за предоставленный препринт работы [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные Задачи для Операторно-Дифференциальных Уравнений*, Наукова думка, Киев, 1984.
- [2] M. Lesch, M. Malamud, *On the deficiency indices and self-adjointness of symmetric Hamiltonian systems*, J. Differential Equations **189**, 556–615 (2003).
- [3] F. S. Rofo-Beketov, A. M. Kholkin, *Spectral Analysis of Differential Operators. Interplay Between Spectral and Oscillatory Properties*, World Scientific Press, Singapore, 2005.
- [4] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями*, Труды ММО **64**, 159–212 (2003).
- [5] К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, *Сингулярные операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями в пространстве вектор-функций*, Докл. РАН **441**, no. 2, 165–168 (2011).
- [6] К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, *Сингулярные операторы Штурма–Лиувилля с негладкими потенциалами в пространстве вектор-функций*, Уфимск. матем. журн. **3**, no. 3, 105–119 (2011).
- [7] К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, *Об индексе дефекта векторного оператора Штурма–Лиувилля*, Матем. Заметки **99**, no. 2, 262–277 (2016).
- [8] К. А. Мирзоев, *Операторы Штурма–Лиувилля*, Труды ММО, **75**, no. 2, 335–359 (2014).
- [9] J. Eckhardt, F. Gesztesy, R. Nichols, G. Teschl, *Weyl–Titchmarsh theory for Sturm–Liouville operators with distributional potentials*, Opuscula Math. **33**, 467–563 (2013).
- [10] J. Eckhardt, F. Gesztesy, R. Nichols, G. Teschl, *Supersymmetry and Schrödinger-type operators with distributional matrix-valued potentials*, J. Spectr. Theory, **4**, 715–768 (2014).
- [11] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics. With an Appendix by P. Exner*, 2nd edn., Amer. Math. Soc., Providence, 2004.
- [12] А. С. Костенко, М. М. Маламуд, *Об одномерном операторе Шредингера с δ -взаимодействиями*, Функц. анализ и его прил. **44**, no. 2, 87–91 (2010).
- [13] A. S. Kostenko, M. M. Malamud, *1-D Schrödinger operators with local point interactions on discrete set*, J. Differential Equations **249**, 253–304 (2010).
- [14] S. Albeverio, A. Kostenko, M. Malamud, *Spectral theory of semi-bounded Sturm–Liouville operators with local interactions on a discrete set*, J. Math. Phys. **51**, Art ID 102102 (2010).
- [15] A. S. Kostenko, M. M. Malamud, *1-D Schrödinger operators with local point interactions: a review*, Proc. Symp. Pure Math. **87**, 235–262 (2013).
- [16] V. A. Derkach, M. M. Malamud, *Generalized resolvents and the boundary value problems for hermitian operators with gaps*, J. Funct. Anal. **95**, 1–95 (1991).
- [17] М. М. Маламуд, *О некоторых классах расширений эрмитовых операторов с лакунами*, Укр. матем. журн. **44**, no. 2, 215–233 (1992).
- [18] Н. И. Ахиезер, *Классическая Проблема Моментов и Некоторые Вопросы Анализа, Связанные с Нею*, Гос. из-во физ.-мат. литературы, 1961.
- [19] Ю. М. Березанский, *Разложение по Собственным Функциям Самосопряженных Операторов*, Наукова думка, Киев, 1968.
- [20] А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, *Трехчленные рекуррентные соотношения с матричными коэффициентами. Вполне определенный случай*, Матем. заметки **63**, 624–630 (1998).
- [21] А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, *Обобщенные якобиевы матрицы и индексы дефекта обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами*, Функц. анализ и его прил. **33**, 30–45 (1999).
- [22] А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, *Признаки вполне неопределенности якобиевых матриц с матричными элементами*, Функц. анализ и его прил. **35**, 265–269 (2001).
- [23] M. Malamud, H. Neidhardt, *Sturm–Liouville boundary value problems with operator potentials and unitary equivalence*, J. Differential Equations **252**, 5875–5922 (2012).

- [24] R. Carlone, M. Malamud, A. Posilicano, *On the spectral theory of Gesztesy–Šeba realizations of 1-D Dirac operators with point interactions on discrete set*, J. Differential Equations **254**, 3835–3902 (2013)
- [25] Ю. М. Дюкарев, *О дефектных числах симметрических операторов, порожденных блочными матрицами Якоби*, Матем. сб. **197**, no. 8, 73–100 (2006).
- [26] Ю. М. Дюкарев, *Примеры блочных матриц Якоби, порождающих симметрические операторы с любыми возможными дефектными числами*, Матем. сб. **201**, no. 12, 83–92 (2010).
- [27] В. И. Коган, *Об операторах, порожденных J_p -матрицами в случае максимальных индексов дефекта*, Теория функций, функц. анализ и их прил. **11**, 103–107 (1970).
- [28] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. III. Теория рассеяния*, М.: Мир, 1982.

Schrödinger operators with δ -interactions in a space of vector-valued functions

Aleksey Kostenko, Mark Malamud, and Daria Natiagailo

Summary: We study spectral properties of Schrödinger operators with δ -interactions on a semi-axis by using the theory of boundary triplets and the corresponding Weyl functions. We establish a connection between spectral properties (deficiency indices, self-adjointness, semiboundedness, discreteness of spectra, resolvent comparability etc.) of Schrödinger operators with point interactions and a special class of block Jacobi matrices.

FACULTY OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF VIENNA, OSKAR-MORGENSTERN-PLATZ 1, 1090 WIEN, AUSTRIA

E-mail address: duzer80@gmail.com;Oleksiy.Kostenko@univie.ac.at

URL: <http://www.mat.univie.ac.at/~kostenko/>

ИПММ НАНУ, г. СЛАВЯНСК

E-mail address: mmm@telenet.dn.ua

ИПММ, г. ДОНЕЦК

E-mail address: delthink@mail.ru